

広域レーザ計測地図と RGB-D カメラを用いた 移動ロボットの広域的 3 次元位置同定

鄭 龍振[†] 大石 修士[†] 倉爪 亮[†] 岩下 友美[†] 長谷川 勉[†]

[†]九州大学大学院システム情報科学研究科 〒 819-0395 福岡西区元岡 744

E-mail: †{yongjin,oishi}@irvs.ait.kyushu-u.ac.jp, ††{kurazume,yumi,hasegawa}@ait.kyushu-u.ac.jp

あらまし 本論文では、事前にレーザ計測により得られた大規模な 3 次元環境地図を用いた、RGB-D カメラを搭載したロボットによる広域的 3 次元位置同定手法を提案する。従来、3 次元環境情報を用いた位置同定は、点群を用いた ICP 法や最尤推定法が用いられるが、これらの手法は計算量が多く、大規模環境下における位置同定に適用するには問題があった。これに対し、提案手法では ICP 法に代わる高速な点群データの位置合わせ手法として提案された NDT に着目し、NDT の有する局所特徴の効率的な格納機能を利用することで、大規模 3 次元データ間の大まか、かつ高速な位置合わせを実現するものである。レーザ計測された 4 千万点からなる大規模 3 次元環境地図と、30 万点の距離データが得られる RGB-D カメラを用いた実験により、提案手法により現実的な処理時間で大規模環境下での広域的 3 次元位置同定が実現できることを示す。

キーワード 3 次元位置同定, 移動ロボット, RGB-D カメラ, Normal Distribution Transformation

1. はじめに

本論文では、外界センサを用いた移動ロボットの位置同定問題 [1,2] に対し、事前にレーザ計測により得られた大規模な 3 次元環境地図 [3] と、ロボットに搭載した RGB-D カメラを用いた、移動ロボットのための広域的 3 次元位置同定手法を提案する。

従来、外界センサを用いた移動ロボットの 2 次元 (位置 2 自由度, 姿勢 1 自由度) の位置同定法では、レーザスキャナや超音波センサなどの距離センサをロボットに搭載し、計測された距離データとあらかじめ与えられた 2 次元地図との比較から位置を同定する手法が一般的である [4]。特に、最尤推定法や ICP (Iterative Closest Point) 法を用いた 2 次元スキャンマッチング、パーティクルフィルタを用いた位置同定手法は数多く提案されている [5-7]。

しかし、近年、3 次元レーザスキャナの普及により、高精度な 3 次元環境地図がロボット用途としても利用可能になりつつある [8-13]。一方、Kinect (Microsoft) や SR4000 (Swiss Ranger) など RGB-D カメラと呼ばれる低価格の距離センサが相次いで発売され、リアルタイムで面状の 3 次元距離データが手軽に得られるようになった。

そこで本論文では、高精度な 3 次元環境地図と RGB-D カメラを搭載したロボットによる、広域環境での 3 次元位置 3 自由度、姿勢 3 自由度) の位置同定手法を提案する。従来、このような 3 次元情報を用いた位置同定は、環境地図と観測データに含まれる点群を用いた ICP (Iterative Closest Point) 法 [8,9] や、観測データ内の点群やボクセルと環境地図内の面やボクセルの分布を比較する手法 [14,15] などが提案されている。しかしこれら

の手法は一般に計算量が多く、特に位置に関する事前知識が利用できない広域的 3 次元位置同定においては、大規模な環境地図に直接適用するには問題がある。

この問題に対し、本手法では、まず点群データで表された 3 次元環境地図に Biber らにより提案された NDT (Normal Distributions Transformation) [16] を適用し、点の分布を 3 次元正規分布で表現した ND ボクセル (Normal Distributions Voxels) を生成する。次に各ボクセルにおいて、計算された 3 次元正規分布から最小固有値方向を法線とする代表平面 (Eigen Planes) を抽出し、これらを地図データとして登録する。また位置同定時には、RGB-D カメラに得られる点群から同様に ND ボクセルを生成し、各ボクセルで代表的な 7 点 (シグマ点と重心点) および代表平面を抽出して、これを計測データとする。その後、点 - 平面間距離や平面法線方向の比較により地図データと計測データの一致度を計算し、パーティクルフィルタにより移動ロボットの自己位置を同定する。

NDT [16] は、ICP 法に代わる複数距離データの高速な位置合わせ手法として提案されたものであり、一般的な ICP 法で最も計算コストの高い最近傍点探索を行わずに、2 つの距離データを詳細に位置合わせする手法である。ICP 法に比べて精度は同程度か若干劣るものの、高速かつより離れた初期位置からでも収束する特徴がある [17]。

一方、提案手法は NDT (あるいは ND ボクセル) を本来の目的である距離データ間の詳細な位置合わせに用いるのではなく、NDT のもう一つの特徴である局所特徴を効率よく表現、格納できる性質に着目し、NDT を局所特徴を用いた 2 つの距離データ間の大まかな位置合わせに利用するものである。提案手法により大まかに位置合わせされた距離データは、既に ND ボクセルの計算は終了

していることから，提案手法で得られた位置を初期位置として通常の NDT と同様に詳細な位置合わせを行うことも可能である．

広域かつ詳細な 3 次元空間データの利用や大量のデータが取得できるセンサの開発により，大規模データの高速度処理はロボット分野でも喫緊の課題である．本論文は特にレーザ計測された数千万点もの大規模な 3 次元環境地図と，一度に 30 万点の距離データが得られる RGB-D カメラを用い，局所特徴を効率的に格納できる ND ボクセルの特性を利用することで，実用的な処理時間で実行可能なロボットの新たな 3 次元位置同定手法を提案する．

本論文では，第 2 章で提案手法であるレーザ計測された 3 次元環境地図と RGB-D カメラを用いた位置同定手法の詳細を示す．また第 3 章で $70 \times 35 \times 3$ [m] の屋内環境に対し，群ロボットシステムによって構築された詳細な環境地図 [3] と RGB-D カメラ (Kinect, Microsoft) を用いて，提案手法の評価を行なった結果を示す．

2. 3 次元環境地図と RGB-D カメラを用いた大域的 3 次元位置同定

本章では，提案する 3 次元環境地図と RGB-D カメラを用いた移動ロボットの大域的 3 次元位置同定手法の詳細を示す．

2.1 地図データ

地図データには，群ロボットシステム [3] によってあらかじめ構築された大規模な 3 次元環境地図を用いる．ただし，この環境地図は大量の点群データから構成されており，位置同定時の計算量削減のために，事前に図 1 に表す ND ボクセル化を行い，分散値が最も小さい方向を法線方向とする代表平面 (Eigen Planes) を抽出しておく．ND ボクセル [16] とは，空間を格子状に分割し，それぞれの格子内に含まれる観測点群の位置に対して分散行列を求め，それを固有値分解することで得られる分散値および軸の方向により点群を 3 次元正規分布で表現する手法である．今回実験に使用した環境地図 ($70 \times 35 \times 3$ [m]，図 2) はおよそ 4 千万点の点データからなり，一辺 800mm の ND ボクセルを用いた場合，およそ 5 万ボクセルとなった．得られた ND ボクセルおよび代表平面を図 3 に示す．

また図 4 に表すように，法線を基に床面を抽出し，2 次元平面地図に変換することで，ロボットの移動可能領域を事前に抽出しておく．これは後述するパーティクルフィルタの処理において，パーティクルの初期分布を決定するのに利用される．

なお，離散化の影響を低減するため，提案手法では Biber ら [16] の手法を 3 次元に拡張し，図 5 に表すように各格子を半分ずつ重複するように配置 (オーバーラップ化) し，一つの点が 8 つのボクセルに含まれるようにしている．

NDT (Normal Distributions Transformation)

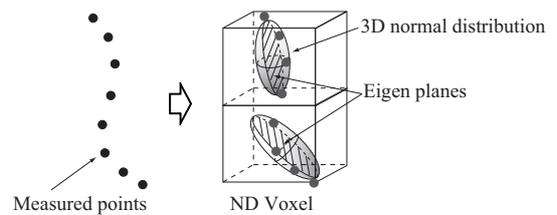


図 1 NDT と ND ボクセルの概念図 [16]

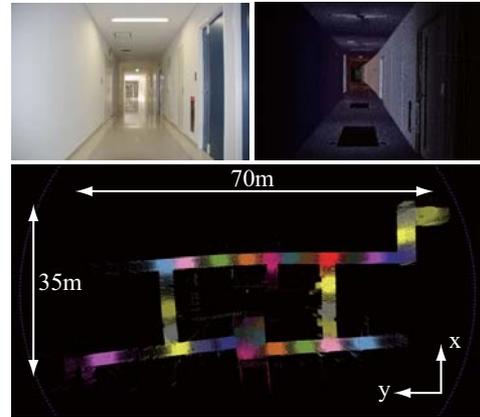
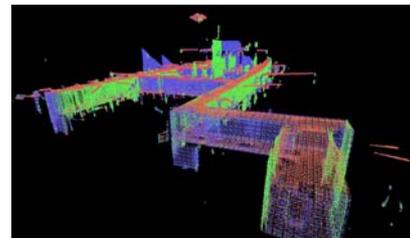


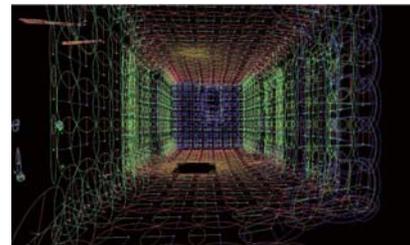
図 2 廊下環境の 3 次元モデル



(a) 点群データ



(b) ND ボクセル



(c) 代表平面

図 3 点群データと代表平面

2.2 計測データ

本論文では，図 6 に示すような RGB-D カメラ (Kinect, Microsoft) を搭載した移動ロボットに対して位置同定を



図4 ND ボクセルから得られた床面データ

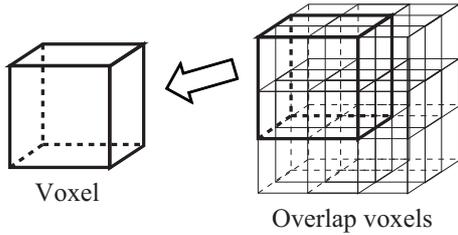


図5 オーバーラップ ND ボクセル

行う。RGB-D カメラから一回の計測で得られる 30 万点の 3 次元点群データの一部を図 7 に表す。

この点群データに対しても、同様に ND ボクセルを計算する。その後、得られた 3 次元正規分布に対して、図 8 に示すように、各軸方向に半径 $\sqrt{-2\log_e r}$ の球面上の点を楕円上に射影した点 (シグマ点, 付録参照) を合計 6 つ抽出し、正規分布の中心点 (重心点) と合わせて 7 つの点を計測データとする。ただしここでは $r = 0.5$ とした。また地図データと同様に代表平面も求めておく。なお計測データに対しても、地図データと同様にボクセルをオーバーラップ化して、離散化の影響を低減する。



図6 RGB-D カメラ (Kinect) を搭載した移動ロボット [18]

2.3 マルチレベル ND ボクセル

上述のように、計測データはオーバーラップ化された ND ボクセル、代表平面、および 7 つの代表点により表現される。このとき、ボクセルの大きさが小さいほど複雑な形状を細かく表現できるが、ボクセルの総数が増加し位置同定の計算量も増加する。一方、大きなボクセルを用いると、ボクセル総数が減少し高速な計算が可能に

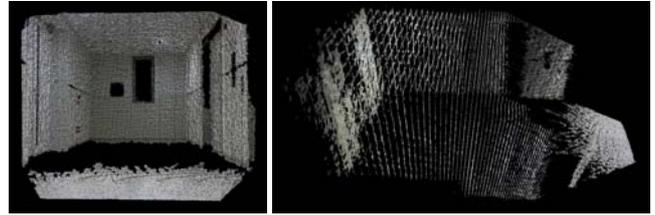


図7 RGB-D カメラで得られた点群データ

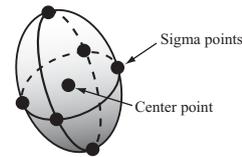


図8 7 つの代表点

なるが、位置同定精度は低下する。そこで図 9 に表すように、異なる大きさのボクセルを用いて ND ボクセル化を行い、位置同定の状況に応じて解像度を変更する。

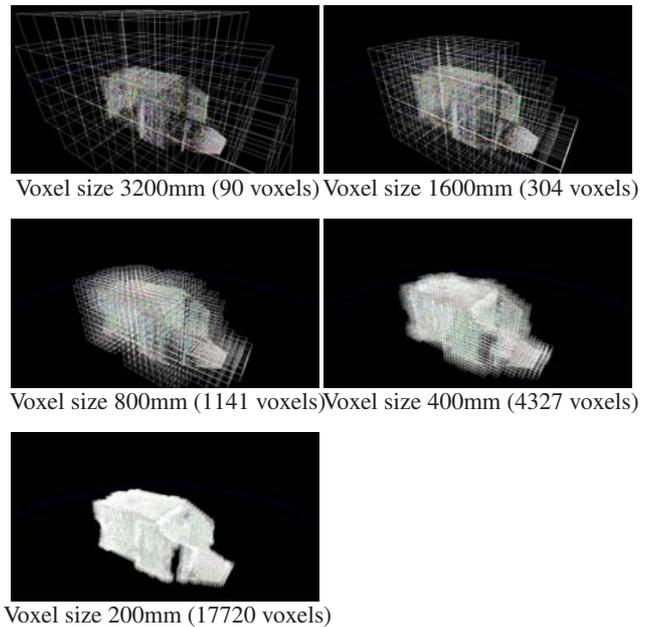


図9 マルチレベル ND ボクセル

2.4 パーティクルフィルタを用いた大域的位置同定

上述したように ND ボクセルで表された地図データと計測データを用い、パーティクルフィルタ [19] により大域的な位置同定を行う。ただし、各パーティクルはそれぞれ候補となるロボットの位置 t 、姿勢 R を保持し、図 10 に示す手順に従い尤度計算を行う。

まず図 11 に示すように、計測データ中の各ボクセルを位置姿勢候補で座標変換し、地図データである各ボクセルの代表平面と計測データである代表点の距離および代表平面の法線の角度差を計算する。

具体的には、 $S_{ik} = (S_{ikx}, S_{iky}, S_{ikz})^T$ を計測データのボクセル i における代表点 k ($k = 1 \sim 7$)、 $N_i = (N_{ix}, N_{iy}, N_{iz})^T$ を代表平面の法線ベクトルとすると、位置姿勢変換後の代表点 \tilde{S}_{ik} 、代表平面の法線ベクトル \tilde{N}_i はそれぞれ

$$\tilde{S}_{ik} = \mathbf{R}S_{ik} + \mathbf{t} \quad (1)$$

$$\tilde{N}_i = \mathbf{R}N_i \quad (2)$$

となる。次に、変換後の代表点が含まれる地図データ中の 8 個のオーバーラップ化されたボクセル m ($m = 1 \sim 8$) に対し、計測データの代表点と地図データの代表平面との距離 $d_{ik \rightarrow m}$ を求め、正規分布にあてはめて代表点 \tilde{S}_{ik} の距離評価値 $\alpha_{ik \rightarrow m}$ とする。

$$\alpha_{ik \rightarrow m} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_d} e^{-d_{ik \rightarrow m}^2 / \sigma_d^2} \quad (3)$$

ここで σ_d は $d_{ik \rightarrow m}$ の分散値を表すパラメータである。また、 N_m を地図データ中のボクセル m における代表平面の法線ベクトル、 μ_m を同じく地図データ中のボクセル m の点群の平均位置とすると、

$$d_{ik \rightarrow m} = |N_{mx}(S_{ikx} - \mu_{mx}) + N_{my}(S_{iky} - \mu_{my}) + N_{mz}(S_{ikz} - \mu_{mz})| \quad (4)$$

と求まる。

また地図データのボクセル m と計測データのボクセル i の代表平面の相対角度の差を評価値 $\beta_{i \rightarrow m}$ とする。

$$\beta_{i \rightarrow m} = |N_{mx}\tilde{N}_{ix} + N_{my}\tilde{N}_{iy} + N_{mz}\tilde{N}_{iz}| \quad (5)$$

これより、代表点 S_{ik} の評価値 γ_{ik} を、オーバーラップ化されたボクセルにおける距離評価値と相対角度評価値の積の最大値として求める。

$$\gamma_{ik} = \max_{1 \leq m \leq 8} \alpha_{ik \rightarrow m} \beta_{i \rightarrow m} \quad (6)$$

最終的に、7 個の代表点に対して評価値の和を計算して、計測データのボクセル i の評価値 δ_i とする。

$$\delta_i = \sum_{k=1}^7 \gamma_{ik} \quad (7)$$

最後に、計測データの全てのボクセルの和を求めて、パーティクルの尤度 λ とする。

$$\lambda = \sum_{i=1}^N \delta_i \quad (8)$$

ただし N は計測データのボクセル数である。

なお、必要なパーティクル数は、KLD サンプリング法 [20] により、収束状況に応じて 1000 個から 5000 個の範囲で適応的に変更する。ただし初回のパーティクルフィルタの計算のみ、ランダムにサンプリングされた 1000 個所の位置において、72 通りに方向を変えた 72,000 個のパーティクルを使用した。

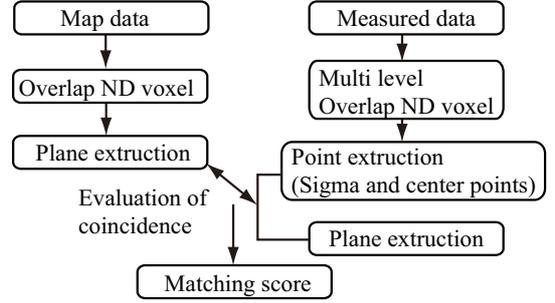


図 10 尤度計算の流れ

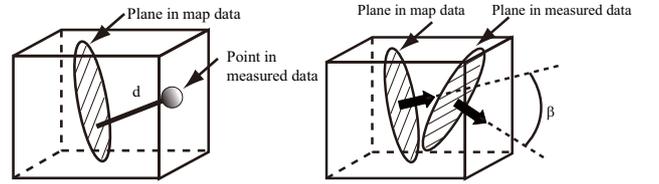


図 11 距離と方位の評価法

2.5 一般的なスキャンマッチング

ボクセル化された地図データと距離センサからの計測データを比較し、ロボットの位置姿勢を同定する方法として、一般には最尤推定法に基づくスキャンマッチングが広く用いられる。

まず、ロボットの位置 s からある方向の計測点までの距離を r 、その計測方向で地図上の最も近い物体までの距離を \bar{r} としたとき、センサの観測モデルを確率 $p_s(r|\bar{r})$ で与える。ただし通常、この $p_s(r|\bar{r})$ として、図 12 のように \bar{r} より近い部分は偽陽性として小さな確率、遠い部分は誤検出として 0 に近い確率、また \bar{r} の近傍ではガウス状の確率分布を与える。また、観測の独立性を仮定すると、ロボットの位置はベイズ定理より最尤推定法により求まる。

$$\arg \max_s p(s|r) = \arg \max_s \prod_i p_s(r_i|\bar{r}_i) \quad (9)$$

ただし r_i 等は i 番目の観測された距離値である。

ボクセルデータで表された 3D データに対しても本手法は適用できる。すなわち、計測位置を s 、計測データ中の代表点（例えばボクセル中心）を r_i とする。また地図データ中で s と r_i を結ぶ直線と交差するボクセルが存在する場合、そのうち最も計測位置に近いボクセルの代表点を \bar{r} とすることで、式 (9) により計測位置 s が求め

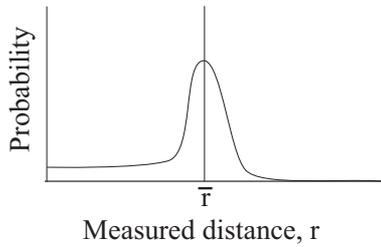


図 12 一般的なセンサ計測値の確率分布

られる。

また、前章のようにパーティクルフィルタで最尤推定値を求める場合には、それぞれのパーティクルの尤度 λ として

$$\lambda = \prod_i p_s(r_i | \bar{r}_i) \quad (10)$$

を用いればよい。なお後述する実験では、図 12 を簡略化した次式を用いた。

$$p_s(r_i | \bar{r}_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(r_i - \bar{r}_i)^2 / \sigma^2} \quad (11)$$

3. 位置推定実験

図 6 に示すロボットを、図 13 の点線で示す経路に従い移動させ、経路上の 80 点からロボットが静止した状態で RGB-D カメラにより距離データを取得した。RGB-D カメラからの一回の計測では、307,200 点の距離データが得られる。図 13 にロボットに搭載した RGB-D カメラで計測したカラー画像と距離画像、およびそれぞれの撮影位置を示す。このように、廊下は多くの地点で非常に類似したカラー画像、距離画像が得られ、知覚的見せかけの生じやすい、大域的位置同定が難しい環境である。

次に、得られた距離データを一辺 1600[mm] のオーバーラップ ND ボクセル (平均ボクセル数 121 個) に変換した。

その後、計測した 80 か所に対し、初期位置をランダムに与えたパーティクルフィルタにより、それぞれの計測位置を独立に推定した。初期パーティクル数は 72,000 であり、その後は 1000 から 5000 までの範囲で適応的にパーティクル数を変更しながらパーティクルを 4 回更新し、最終的に最も尤度の高いパーティクルの位置情報を推定値とした。

経路上の 80 か所のうち、提案手法により推定位置が実際の計測位置から xyz 方向に 500[mm]、かつ方向が 10 度以内で推定された場合の正解率と、第 2.5 章で示した最近傍ボクセル分布の比較によるスキャンマッチングの正解率を表 1 に示す。なお、スキャンマッチングに対しては、ボクセルの大きさを例えば 1600[mm] から 400[mm] に変更しても、計算時間が 20 分超となる一方で推定精度には大きな変化はなかった。

表 1 より、提案手法により大域的位置同定の正答率が大幅に向上することがわかる。これは、スキャンマッ

表 1 大域的位置同定の成功率 ただし位置 500mm 以内、方向 10 度以内で推定された場合を成功とする

σ, σ_d [mm]	100	300	500	800	1000
Proposed [%]	23.8	27.5	28.8	18.8	23.8
Scan matching [%]	2.5	1.3	1.3	2.5	1.3

ングではボクセル間の距離のみを評価しているのに対し、提案手法ではボクセル内の点の分布 (法線方向や分散値) を用いているためであると考えられる。

また計算時間 (Intel(R) Xeon(R) CPU 2.67GHz Quad core 4GB メモリ) は、提案手法ではパーティクル 4 回の更新で 75.4 秒であり、1 パーティクル当たりの 1 回の尤度計算の処理時間はスキャンマッチングで平均 0.39[ms]、提案手法で平均 1.15[ms] であった、提案手法の計算時間が大きいのは、提案手法ではオーバーラップ化された NDT を用いており、1 つのパーティクルの尤度計算に 8 個のボクセルを評価するためと考えられる。

なお一例として、Kinect から得られる距離データ (307,200 点) 2 枚に対して、Point Cloud Library [21] で提供されている ICP 法を適用してレジストレーションを行った場合、最近傍点探索等の一連の更新手順 1 回につき平均で 118.5(s) 必要であった。すなわち、上記の実験のように 72,000 個のパーティクルを利用した場合には、全パーティクルの更新 1 回につき単純計算で 2370 時間と、非現実的な計算時間が必要となる。

4. 結 論

本論文では、事前にレーザ計測により得られた数千万点もの大規模な 3 次元環境地図と、一度に 30 万点の距離データが得られる RGB-D カメラを用い、実用的な処理時間で実行可能な、移動ロボットのための大域的 3 次元位置同定手法を提案した。

本手法は、局所特徴を効率的に格納できる ND ボクセルの特性を利用し、点群で表された環境地図や計測データの ND ボクセル化、代表平面、代表点の抽出、およびパーティクルフィルタにより、大規模データに対しても高速な大域的位置同定を実現するものである。

今後は、ND ボクセルと代表点情報を用いた、より高精度な位置同定手法を実装、開発する予定である。

謝辞

本研究の一部は文部科学省科学研究費補助金基盤研究 (B) (課題番号 23360115) の支援を受けた。

文 献

- [1] G. N. DeSouza and A. C. Kak: "Vision for mobile robot navigation: A survey", IEEE Trans. on Pattern analysis and machine intelligence, **24**, 2, pp. 237–267 (2002).
- [2] S. Thrun: "Robotic mapping: A survey", CMU-CS-02-111 (2002).
- [3] 鄭, 岩下, 倉爪: "Cps-slam の研究-計測精度の向上とトンネル出来形計測システムの構築-", 日本ロボット学会誌.

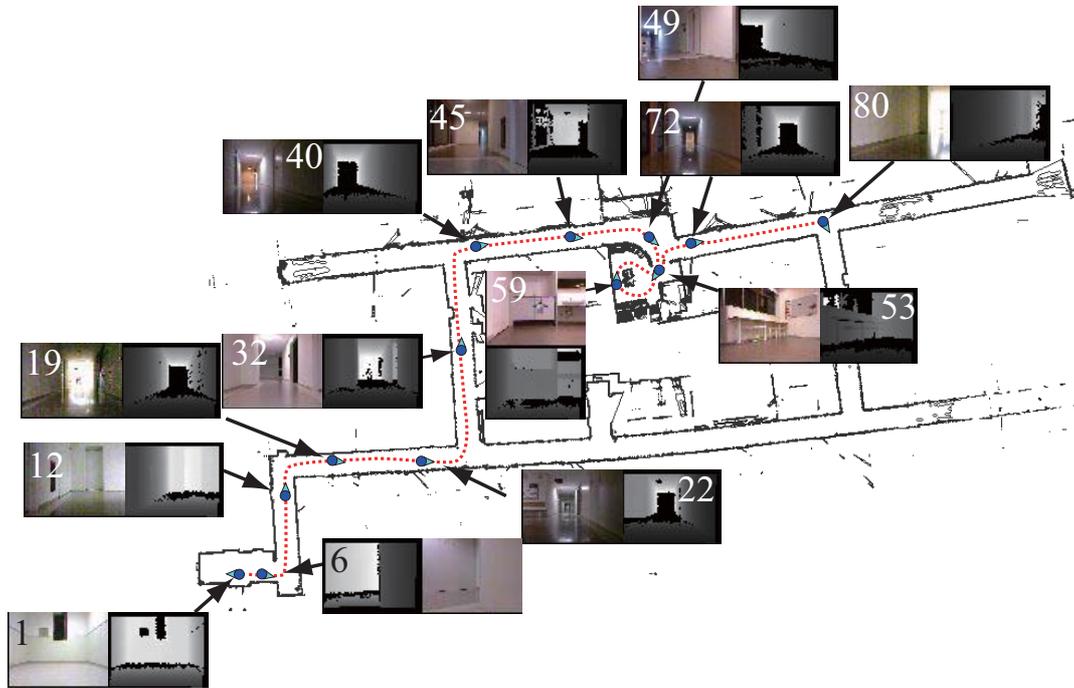


図 13 カラーおよび距離画像の取得位置

- 30, 2, pp. – (2012).
- [4] J.-A. Meyer and D. Filliat: “Map-based navigation in mobile robots: a review of map-learning and path-planning strategies”, *Cognitive Systems Research*, **4**, 4, pp. 283–317 (2003).
- [5] K. Konolige and K. Chou: “Markov localization using correlation”, *Proceedings of the International Joint Conference on AI (IJCAI)* (1999).
- [6] F. Dellaert, D. Fox, W. Burgard and S. Thrun: “Monte carlo localization for mobile robots”, *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation*, Vol. 2, pp. 1322–1328 (1999).
- [7] S. Thrun, W. Burgard and D. Fox: “Probabilistic Robotics”, MIT Press (2005).
- [8] A. Nüchter, H. Surmann, K. Lingemann, J. Hertzberg and S. Thrun: “6d slam with an application in autonomous mine mapping”, *Proceedings of the 2004 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pp. 1998–2003 (2004).
- [9] A. Nüchter, K. Lingemann, J. Hertzberg and H. Surmann: “6d slam - 3d mapping outdoor environments”, *J. Field Robot.*, **24**, 8-9, pp. 699–722 (2007).
- [10] 倉爪, 戸畑, 村上, 長谷川: “Cps-slam の研究-大規模建造物の高精度 3 次元幾何形状レーザ計測システム”, *日本ロボット学会誌*, **25**, 8, pp. 1234–1242 (2007).
- [11] Y. Tobata, R. Kurazume, Y. Noda, K. Lingemann, YumiI-washita and T. Hasegawa: “Laser-based geometrical modeling of large-scale architectural structures using co-operative multiple robots”, *Autonomous Robot*, **32**, 1, pp. 46–62 (2011).
- [12] S. Kagami, R. Hanai, N. Hatao and M. Inaba: “Outdoor 3d map generation based on planar feature for autonomous vehicle navigation in urban environment”, *Proceedings of the 2010 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, pp. 1526–1531 (2010).
- [13] T. Suzuki, M. Kitamura, Y. Amano and T. Hashizume: “6-dof localization for a mobile robot using outdoor 3d voxel maps”, *Proceedings of the IEEE/RSJ International conference on Intelligent Robots and Systems*, pp. 5737–5743 (2010).
- [14] C. F. Olson and L. H. Matthies: “Maximum likelihood rover localization by matching range maps”, *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pp. 272–277 (1998).
- [15] D. Hähnel and W. Burgard: “Probabilistic matching for 3d scan registration”, *Proc. of the VDI-Conference Robotik 2002 (Robotik)* (2002).
- [16] P. Biber and W. Straber: “The normal distributions transform: a new approach to laser scanmatching”, *Proceedings of the 2003 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, pp. 2743–2748 (2003).
- [17] M. Magnusson, A. Nüchter, C. Lörken, A. J. Lilienthal and J. Hertzberg: “Evaluation of 3d registration reliability and speed a comparison of icp and ndt”, *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pp. 3907–3912 (2009).
- [18] 鄭, 石橋, 倉爪, 岩下, 長谷川: “4 台の kinect を搭載した全方向計測ロボットによる環境計測”, 第 29 回日本ロボット学会学術講演会講演予稿集, pp. 103–4 (2011).
- [19] 一般社団法人: “ロボットテクノロジー”, オーム社 (2011).
- [20] D. Fox: “Adapting the sample size in particle filters through kld-sampling”, *International Journal of Robotics Research*, **22**, 12, pp. 985–1004 (2003).
- [21] “Point cloud library”. <http://pointclouds.org/>.

付 録

1. シグマ点について

シグマ点の求め方を以下に示す。点群が 3 変数正規分布に従い存在している場合、点が位置 x_s に存在する確率は次式で表現される。

$$P(x_s) = (2\pi \det(\Sigma))^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2}(x_s - \mu)^T \Sigma^{-1}(x_s - \mu)\right) \quad (\text{A}\cdot 1)$$

ただし、 μ は点群の重心、 Σ は分布の共分散行列である。このとき、存在確率が重心位置 μ での r 倍になる ($0 < r \leq 1$) 点 x は次で与えられる。

$$\exp\left(-\frac{1}{2}(x - \mu)^T \Sigma^{-1}(x - \mu)\right) = r \quad (\text{A}\cdot 2)$$

$$(x - \mu)^T \Sigma^{-1}(x - \mu) = -2\log_e r \quad (\text{A}\cdot 3)$$

一方、半径 $\sqrt{-2\log_e r}$ の球の表面上の 1 点を p とすると、上式は以下のように表せる。

$$(x - \mu)^T \Sigma^{-1}(x - \mu) = p^T p \quad (\text{A}\cdot 4)$$

ここで共分散行列 Σ が正則行列であれば、固有値分解により固有ベクトル行列 V と対角行列である固有値行列 D に分解できる。

$$(x - \mu)^T (VDV^T)^{-1}(x - \mu) = p^T p \quad (\text{A}\cdot 5)$$

$$(x - \mu)^T (VD^{-\frac{1}{2}}V^TVD^{-\frac{1}{2}}V^T)(x - \mu) = p^T p \quad (\text{A}\cdot 6)$$

よって V が正規直交行列であることに注意して、

$$VD^{-\frac{1}{2}}V^T(x - \mu) = p \quad (\text{A}\cdot 7)$$

$$x = VD^{\frac{1}{2}}V^T p + \mu \quad (\text{A}\cdot 8)$$

となる。

この変換は、半径 $\sqrt{-2\log_e r}$ の球の表面上の一つの点 p を共分散行列 Σ で表される楕円表面上の一つの点 x に変換するもので、これを用いて $(\sqrt{-2\log_e r}, 0, 0)$, $(-\sqrt{-2\log_e r}, 0, 0)$, $(0, \sqrt{-2\log_e r}, 0)$, $(0, -\sqrt{-2\log_e r}, 0)$, $(0, 0, \sqrt{-2\log_e r})$, $(0, 0, -\sqrt{-2\log_e r})$ の 6 つの点 p を楕円上に変換した点をシグマ点と呼ぶ。